SOLUCIONARIO

Paraninfo

Solucionario: ejercicios propuestos

Capítulo 1

Ejercicio 1

a) Como A y A^c son incompatibles, utilizando el apartado 2 de la Definición 1.1, se deduce que $P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$. Entonces, teniendo en cuenta que $A \cup A^c = \Omega$ y $P(\Omega) = 1$ (véase apartado 3 de la Definición 1.1), se deduce que $P(A^c) = 1 - P(A)$.

b) Aplicando la propiedad anterior con $A = \Omega$ y $A^c = \emptyset$, y teniendo en cuenta que $P(\Omega) = 1$ (véase apartado 3 de la Definición 1.1), se deduce que $P(\emptyset) = 0$.

c) Sean dos sucesos A, B tal que $A \subseteq B$. Se puede escribir $B = A \cup C$, siendo C el suceso $C = A^c \cap B$. Utilizando la propiedad 2 de la Definición 1.1, se deduce que $P(B) = P(A) + P(C)$ y como $P(C) \geq 0$ (véase apartado 1 de la Definición 1.1), se concluye que $P(A) \leq P(B)$.

d) Se demuestra que $P(A) \leq 1$, a partir de la propiedad anterior, teniendo en cuenta que $A \subseteq \Omega$ y que $P(\Omega) = 1$ (véase apartado 3 de la Definición 1.1).

e) Teniendo en cuenta que $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ y utilizando el apartado 2 de la Definición 1.1, se deduce que $P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B)$.

f) Como $A = (A \backslash B) \cup (A \cap B)$ y $B = (B \backslash A) \cup (B \cap A)$, aplicando la propiedad anterior, se deduce que

$$P(A) = P(A \backslash B) + P(A \cap B), \quad P(B) = P(B \backslash A) + P(A \cap B).$$

Por otro lado, como $A \cup B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A) \cup (A \cap B)$, aplicando la Nota 1.2, se tiene que

$$P(A \cup B) = P(A \backslash B) + P(B \backslash A) + P(A \cap B)$$

lo cual, a partir de las igualdades anteriores, es equivalente a $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Ejercicio 2

Utilizando la Regla de Laplace (véase Sección 1.2) se tiene que

$$P(M \cap F) = 3/10, \quad P(M \cup F) = 8/10, \quad P(F|M) = 3/7, \quad P(H|NF) = 2/6.$$

Ejercicio 3
Aplicando la Regla del Producto (Teorema 1.1) se tiene que

$$P(R_1 \cap N_2 \cap R_3) = P(R_1)P(N_2|R_1)P(R_3|R_1 \cap N_2) = 3/6 \cdot 1/5 \cdot 2/4 = 1/20$$

donde R_1, N_2, R_3 son los sucesos: $R_1 \equiv \{\text{sacar la primera bola roja}\}$, $N_2 \equiv \{\text{sacar la segunda bola negra}\}$ y $R_3 \equiv \{\text{sacar la tercera bola roja}\}$.

Ejercicio 4
Los dígitos de las posiciones 8, 9 y 10 deben ser pares y hay 5 dígitos pares luego para esas tres posiciones tenemos $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ posibilidades (se tienen $V_{5,3}$). Hecho esto quedarán 7 dígitos para las 7 primeras posiciones luego son permutaciones P_7. En total habrá $60 \cdot 7! = 302400$ ordenaciones posibles.

Ejercicio 5
Se consideran los sucesos $A \equiv \{\text{el componente proviene del distribuidor A}\}$ (los sucesos B y C se definen de forma análoga) y $D \equiv \{\text{el componente es defectuoso}\}$.
Por el Teorema de Bayes (Teorema 1.3) y el Teorema de la Probabilidad Total (Teorema 1.2), se tiene que

$$\begin{aligned} P(A|D) &= \frac{P(A)P(D|A)}{P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C)} \\ &= \frac{\frac{1}{3}0.001}{\frac{1}{3}0.001 + \frac{1}{3}0.005 + \frac{1}{3}0.01} = \frac{0.001}{0.016} = \frac{1}{16}. \end{aligned}$$

Razonando de forma análoga se obtiene que $P(C|D) = \dfrac{10}{16}$.

Ejercicio 6
Para todo suceso A se define $P(A|B) := \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Veamos que $P(\cdot|B)$ cumple los tres axiomas de Kolmogorov (Definición 1.1):

a) Como $P(\cdot)$ es una probabilidad debe ser $P(A \cap B) \geq 0$. Como además $P(B) > 0$ será $P(A|B) \geq 0$.

b) Sean A_1 y A_2 sucesos tales que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Entonces:

$$P(A_1 \cup A_2|B) = \frac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \frac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{P(B)}.$$

Como $(A_1 \cap B) \cap (A_2 \cap B) = \emptyset$ y $P(\cdot)$ es una probabilidad, esto se puede expresar como:

$$\frac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P(A_1|B) + P(A_2|B)$$

con lo cual se satisface el segundo axioma.

c) Se tiene que:

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

Capítulo 2

Ejercicio 1

a) Teniendo en cuenta la Proposición 2.1, debe ocurrir que $\sum_{x\in\mathbb{N}} p(x) = 1$. Por lo tanto,

$$1 = \sum_{x=1}^{\infty} k(\beta^x - \alpha^x) = k\left(\sum_{x=1}^{\infty}\beta^x - \sum_{x=1}^{\infty}\alpha^x\right) =$$

$$= k\left(\frac{\beta}{1-\beta} - \frac{\alpha}{1-\alpha}\right) = k\frac{\beta-\alpha}{(1-\alpha)(1-\beta)}.$$

Entonces,

$$k = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta-\alpha}.$$

b) Se tiene que

$$p(1) = (1-\alpha)(1-\beta),$$

$$p(2) = \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{\beta-\alpha}(\beta^2-\alpha^2) = (1-\alpha)(1-\beta)(\alpha+\beta).$$

Ejercicio 2

a) Teniendo en cuenta la Proposición 2.2, debe ocurrir que $\int_a^{\infty} f(x)dx = 1$. Por lo tanto tanto,

$$1 = \int_a^{\infty} \frac{a}{x^2}dx = a\left[\frac{-1}{x}\right]_a^{\infty} = a\frac{1}{a}.$$

Esto se cumple para cualquier valor positivo de a, luego no hace falta imponer ninguna restricción extra sobre el parámetro.

b) Para $a = 2$ se tiene que $F(t) = 0$ si $t \leq 2$ y

$$F(t) = \int_2^t \frac{2}{x^2}dx = 2\left[\frac{-1}{x}\right]_2^t = 2\left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{t}, \quad \text{si } t > 2.$$

Ejercicio 3

Se define el suceso $O_i \equiv \{$la carta extraída en i–ésimo lugar es un oro$\}$.

a) Se quiere calcular $P(O_1 \cap O_2 \cap O_3 \cap O_4)$. Aplicando la Regla del Producto (Teorema 1.1), se tiene que

$$P(O_1 \cap O_2 \cap O_3 \cap O_4) = P(O_1)P(O_2|O_1)P(O_3|O_1 \cap O_2)P(O_4|O_1 \cap O_2 \cap O_3).$$

- Si se supone que hay reemplazamiento se tiene que

$$\left(\frac{10}{40}\right)^4 \approx 0.0039.$$

- Si por el contrario se supone que no hay reemplazamiento se tiene que

$$\frac{10}{40}\frac{9}{39}\frac{8}{38}\frac{7}{37} \approx 0.0023.$$

b) Se define la variable $X \equiv \{$número de oros obtenidos en las 4 extracciones$\}$.

1) Si se supone que hay reemplazamiento se tiene que $X \sim B(n = 4, p = 10/40)$ (véase Sección 2.3) y

$$P(X = 3) = p(3) = \binom{4}{3}\left(\frac{10}{40}\right)^3\left(\frac{30}{40}\right)^1 = 0.046875.$$

2) Si por el contrario se supone que no hay reemplazamiento se tiene que $X \sim H(N = 40, N_A = 10, n = 4)$ (véase Sección 2.3) y

$$P(X = 3) = p(3) = \frac{\binom{10}{3}\binom{30}{1}}{\binom{40}{4}} \approx 0.03939.$$

Observación: estas distribuciones se podrían haber utilizado también en el apartado *a*), pero no ha sido necesario pues el cálculo en este caso era especialmente sencillo.

Ejercicio 4

a) La función de probabilidad de una $\mathcal{P}(\lambda = 3)$ es $p(k) = \dfrac{3^k}{k!}e^{-3}$ para todo $k = 0, 1, \ldots$. Por lo tanto $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - e^{-3} - 3e^{-3} \approx 0.8$.

b) Sea $X_2 \equiv \{$número de averías en dos semanas$\}$. Por la propia naturaleza de la distribución de Poisson, se tiene que $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda = 6)$. Entonces,

$$P(2 \leq X_2 \leq 4) = P(X_2 = 2) + P(X_2 = 3) + P(X_2 = 4) =$$

$$= \frac{6^2}{2!}e^{-6} + \frac{6^3}{3!}e^{-6} + \frac{6^4}{4!}e^{-6} \approx 0.2677.$$

c) Si el número de averías por semana es $\mathcal{P}(\lambda = 3)$ el tiempo entre dos averías (expresado en semanas) será $\exp(\lambda = 3)$ (véase Proposición 2.6). Por tanto, $P(T < 3 \text{ días}) \approx P(T < 0.4286 \text{ semanas}) = 1 - e^{-3 \cdot 0.4286} \approx 0.7235$.

d) Se define la v.a. $T_i \equiv \{$tiempo que dura el recambio número $i\}$ y piden calcular $P(T > 2)$, donde $T = T_1 + \cdots + T_6$. Como las T_i son independientes, a partir de la Observación 2.15, se tiene que $T \sim 6 - \text{Erlang}(\lambda = 3)$, luego

$$P(T > 2) = 1 - P(T < 2) = 1 - \int_0^2 \frac{3^6}{5!}x^5 e^{-3x}dx \approx 0.4457.$$

Ejercicio 5

Se definen los sucesos $D \equiv \{$día despejado$\}$ y $N \equiv \{$día nublado$\}$. Según el enunciado será $P(D) = 2/3$ y $P(N) = 1/3$.

a) Se tiene que

$$P(30 < T < 35|D) = P\left(\frac{30-40}{4} < \frac{T-40}{4} < \frac{35-40}{4}\middle| D\right) = P(-2.5 < Z < -1.25).$$

Siguiendo el procedimiento descrito en la Sección 2.9 encontramos que esta probabilidad puede calcularse como

$$P(Z > 1.25) - P(Z > 2.5) = 0.1056 - 0.0062 = 0.0994$$

y a su vez

$$P(30 < T < 35|N) = P\left(\frac{30-28}{3} < \frac{T-28}{3} < \frac{35-28}{3}\middle| N\right) = P(0.67 < Z < 2.33)$$

$$= P(Z > 0.67) - P(Z > 2.33) = 0.2514 - 0.0099 = 0.2415.$$

Por último, aplicando el Teorema de la Probabilidad Total (Teorema 1.2)

$$P(30 < T < 35) = 2/3 \cdot 0.0994 + 1/3 \cdot 0.2415 \approx 0.1468.$$

b) Buscamos dos valores A y B tales que $P(T < A) = P(T > B) = 0.025$. Por la simetría de la distribución normal repecto de su media se cumplirá $\dfrac{A+B}{2} = \mu \Rightarrow A = 2\mu - B$. Para calcular B se tipifica según la Proposición 2.13, y se tiene que

$$P(T > B) = P\left(Z > \frac{B-28}{3}\right) = 0.025.$$

En la tabla de la distribución $N(0,1)$ (Apéndice B), se tiene que $\dfrac{B-28}{3} = 1.96$. Por tanto, $B = 33.88$ y $A = 22.12$.
Obsérvese que en consecuencia, se tiene que $P(22.12 < T < 33.88) = 0.95$. Se dice que $(22.12, 33.88)$ es un intervalo de predicción del 95 % para T (véase Ejemplo 2.27).

Ejercicio 6

Se definen las variables $T_i \equiv \{\text{tiempo de vida de la bombilla } i\}$. Teniendo en cuenta que las v.a. T_i son independientes, se tiene que

$$P(\text{funcione alguna}) = 1 - P(\text{no funcione ninguna}) =$$

$$= 1 - P(\cap_{i=1}^{8}(T_i < 7)| \cap_{i=1}^{8} (T_i > 3)) = 1 - \prod_{i=1}^{8} P(T_i < 7|T_i > 3).$$

Por otro lado,

$$P(T_i < 7|T_i > 3) = \frac{P(3 < T_i < 7)}{P(T_i > 3)} = \frac{P(T_i > 3) - P(T_i > 7)}{P(T_i > 3)}.$$

Como $T_i \sim$ Gamma$(p = 2, \lambda = 1)$ se tiene que

$$P(T_i > t) = \int_t^\infty xe^{-x}dx = (t+1)e^{-t}$$

con lo cual,

$$P(T_i < 7|T_i > 3) = \frac{4e^{-3} - 8e^{-7}}{4e^{-3}} = 1 - 2e^{-4} \approx 0.9634.$$

Esto es así para todo $i = 1, \dots, 8$, luego

$$P(\text{funcione alguna}) = 1 - 0.9634^8 \approx 0.2579.$$

Ejercicio 7

a) Utilizando los resultados de la Sección 2.7.2, se tiene que:

$$M_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_a^\infty e^{-sx}\lambda e^{-\lambda(x-a)}dx = \lambda e^{\lambda a}\int_a^\infty e^{-(\lambda+s)x}dx =$$

$$= \frac{-\lambda e^{\lambda a}}{\lambda + s}[e^{-(\lambda+s)x}]_a^\infty = \frac{-\lambda e^{\lambda a}}{\lambda+s}(-e^{-(\lambda+s)a}) = \frac{\lambda e^{-as}}{\lambda+s}.$$

b) Empezamos por calcular la derivada:

$$M'_X(s) = \frac{\lambda e^{-as}(-a)(\lambda+s) - \lambda e^{-as}}{(\lambda+s)^2}.$$

Ahora

$$E[X] = \alpha_1 = -M'(0) = -\frac{\lambda(-a)\lambda - \lambda}{\lambda^2} = a + 1/\lambda.$$

Capítulo 3

Ejercicio 1

a) Sabemos que el número de mensajes recibidos por la linea 1 hasta el instante t ($N_1(t)$) sigue una distribución $\mathcal{P}(\lambda t)$. Teniendo en cuenta la Proposición 2.6 y la Observación 2.13, deducimos que $X_1 \sim \exp(\lambda)$.

b) Queremos calcular

$$P(X_1 < X_2|X_2 > T) = \frac{P(X_1 < X_2 \cap X_2 > T)}{P(X_2 > T)}.$$

Por el apartado anterior sabemos que $P(X_2 > T) = e^{-\lambda T}$. En cuanto al numerador,

$$P(X_1 < X_2 \cap X_2 > T) = \int_T^\infty \int_0^{x_2} f_{X_1X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2.$$

Como dicen que los procesos de Poisson asociados a ambas líneas son independientes, aplicando la Proposición 3.4 se tiene que $f_{X_1X_2}(x_1,x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2)$, luego

$$P(X_1 < X_2 \cap X_2 > T) = \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_2} \int_0^{x_2} \lambda e^{-\lambda x_1} dx_1 dx_2$$

$$= \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_2}(1-e^{-\lambda x_2})dx_2 = \int_T^{\infty} \lambda e^{-\lambda x_2} dx_2 - \int_T^{\infty} \lambda e^{-2\lambda x_2} dx_2 = e^{-\lambda T} - \frac{1}{2}e^{-2\lambda T}.$$

Por tanto,

$$P(X_1 < X_2 | X_2 > T) = 1 - \frac{1}{2}e^{-\lambda T}.$$

c) Obsérvese que

$$Y = \text{mín}\{X_1, X_2\}.$$

Por tanto, aplicando la Observación 2.12, deducimos que $Y \sim \exp(2\lambda)$.

Ejercicio 2

a) Teniendo en cuenta la Proposición 3.2, para que f_{XY} sea una función de densidad bien definida, debe verificarse que

$$\iint_{S_{XY}} f_{XY}(x,y)dxdy = \iint_{\mathcal{C}} K dxdy = K \text{Área}(\mathcal{C}) = K\pi = 1.$$

Por lo tanto, debe ser $K = 1/\pi$.

b) Se tiene que

$$f_X(x) = \int_{S_{Y|X=x}} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dy = \frac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} \quad \text{en} \quad S_X = (-1,1).$$

Por simetría, debe ser $f_Y(y) = \dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}$ en $S_Y = (-1,1)$.

c) Según la Proposición 3.2, esta probabilidad se puede calcular como

$$P(X+Y>1) = \iint_{S_{XY}\cap A} f_{XY}(x,y)dxdy = \int_0^1 \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{\pi-2}{4\pi} \approx 0.0908.$$

donde $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y>1\}$.

d) Teniendo en cuenta la Nota 3.4, hay que estudiar si $E[XY] = E[X]E[Y]$. Sabemos que $f_{XY} = 1/\pi$ en $\mathcal{C}$, luego $E[XY] = \displaystyle\iint_{\mathcal{C}} \frac{xy}{\pi} dxdy$. Usando coordenadas polares,

$$E[XY] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r\cos\theta)(r\,\text{sen}\,\theta) r dr d\theta =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \text{sen}\,\theta\cos\theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \frac{1}{\pi}\left[\frac{\text{sen}^2\,\theta}{2}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = 0.$$

Por otro lado,

$$E[X] = \int_{-1}^{1} x \frac{2\sqrt{1-x^2}}{\pi} dx = \frac{-2/3}{\pi} \left[(1-x^2)^{3/2} \right]_{-1}^{1} = 0.$$

y, por simetría, $E[Y] = 0$. Por lo tanto, $E[XY] = E[X]E[Y]$ y las variables son incorreladas.

Observación: la esperanza de X también se podía haber calculado como

$$E[X] = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\cos\theta) r dr d\theta.$$

e) No pueden ser independientes ya que $S_{XY} \neq S_X S_Y$ (Proposición 3.5).

f) Teniendo en cuenta la Proposición 2.7 y usando otra vez polares,

$$E[X^2+Y^2] = \iint_{\mathcal{C}} (x^2+y^2) \frac{1}{\pi} dxdy = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2 r dr d\theta = 2 \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^1 = 1/2.$$

Por otro lado, $E[X^2+Y^2] = E[X^2] + E[Y^2] = 2E[X^2]$ (ya que, por simetría, $E[X^2] = E[Y^2]$). De aquí se concluye que $E[X^2] = 1/4$.

Ejercicio 3

a) Como $Z = Y - X$, tenemos que

$$E[Z] = E[Y] - E[X] = \int_1^\infty y e^{1-y} dy - \int_0^1 x 2(1-x) dx = 5/3.$$

b) Se tiene que $S_Z = (0, +\infty)$. Por otro lado

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(Y - X \leq t) = P(Y \leq t + X) = \int_0^1 P(Y \leq t + x) f_X(x) dx$$

donde se ha aplicado el Teorema 3.3. Se calcula

$$P(Y \leq t + x) = \int_1^{t+x} e^{1-y} dy = 1 - e^{1-(t+x)} \quad \text{si } t + x > 1 \Leftrightarrow x > 1 - t$$

luego, supuesto que $1 - t > 0$ (es decir, que $t < 1$), se tiene que

$$F_Z(t) = \int_{1-t}^{1} (1 - e^{1-(t+x)}) 2(1-x) dx = 1 - 2e^{-t} + (1-t)^2.$$

En cambio, si $t \geq 1$ se tiene que

$$F_Z(t) = \int_0^1 (1 - e^{1-(t+x)}) 2(1-x) dx = 1 - 2e^{-t}.$$

Por último, derivando se obtiene la función de densidad de la v.a. Z

$$f_Z(t) = \begin{cases} 2e^{-t} + 2(1-t) & \text{si} \quad t < 1 \\ 2e^{-t} & \text{si} \quad t > 1. \end{cases}$$

Ejercicio 4

a) El soporte de Z es $S_Z = (0,3)$. Se determina su función de fiabilidad

$$R(t) = P(Z > t) = P(X > t \cap Y > t) = P(X > t)P(Y > t).$$

Por otro lado,

$$P(X > t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{4-t}{4} & \text{si} \quad 0 \le t < 4 \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 4 \end{cases} \quad \text{y} \quad P(Y > t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t < 1 \\ \frac{3-t}{2} & \text{si} \quad 1 \le t < 3 \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 3 \end{cases}$$

con lo cual

$$R(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{4-t}{4} & \text{si} \quad 0 \le t < 1 \\ \frac{4-t}{4}\frac{3-t}{2} & \text{si} \quad 1 \le t < 3 \\ 0 & \text{si} \quad t \ge 3. \end{cases}$$

La función de distribución es $F_Z(t) = 1 - R(t)$.

b) El soporte de Z es $S_Z = (0,4)$. De aquí se deduce que $F_Z(t) = 0$ si $t < 0$ y $F_Z(t) = 1$ si $t \ge 4$. Queda ver qué ocurre cuando $0 \le t < 4$:

$$F_Z(t) = P(Z \le t) = P\left(\frac{X}{Y} \le t\right) = P(X \le tY).$$

Aplicando el Teorema 3.3, se tiene que

$$P(X \le tY) = \int_{S_Y} P(X \le ty) f_Y(y)dy = \int_1^3 P(X \le ty)\frac{1}{2}dy, \qquad \text{(I)}$$

siendo

$$P(X \le ty) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad ty < 0 \Leftrightarrow y < 0 \\ \frac{ty}{4} & \text{si} \quad 0 \le ty < 4 \Leftrightarrow 0 \le y < 4/t \\ 1 & \text{si} \quad ty \ge 4 \Leftrightarrow y \ge 4/t. \end{cases}$$

Como $1 < y < 3$, se puede simplificar la expresión anterior y se obtiene

$$P(X \le ty) = \begin{cases} \frac{ty}{4} & \text{si} \quad 1 \le y < 4/t \\ 1 & \text{si} \quad 4/t \le y < 3 \end{cases}$$

siempre que $1 < 4/t < 3$ (es decir, $4/3 < t < 4$). En este caso se separa la integral de (I) en dos integrales. Si $4/t \ge 3$ (es decir, si $t \le 4/3$) se tiene que

$$P(X \le ty) = \frac{ty}{4}$$

para todo $y \in (1,3)$. En cuanto al caso $4/t \le 1$, no es necesario considerarlo ya que sería $t \ge 4$.

Por lo tanto hay dos situaciones posibles:

- Si $0 < t \leq 4/3$, se tiene que

$$F_Z(t) = \int_1^3 \frac{ty}{4}\frac{1}{2}dy = \frac{t}{8}\left[\frac{y^2}{2}\right]_1^3 = \frac{t}{2}.$$

- Si $4/3 < t < 4$, se tiene que

$$F_Z(t) = \int_1^{4/t} \frac{ty}{4}\frac{1}{2}dy + \int_{4/t}^3 \frac{1}{2}dy = \frac{3}{2} - \frac{t}{16} - \frac{1}{t}.$$

En resumen,

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ \frac{t}{2} & \text{si} \quad 0 \leq t < 4/3 \\ \frac{3}{2} - \frac{t}{16} - \frac{1}{t} & \text{si} \quad 4/3 \leq t < 4 \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 4. \end{cases}$$

c) El soporte de Z es $S_Z = (-3, 3)$ y la función de distribución viene dada como

$$F_Z(t) = P(Z \leq t) = P(X - Y \leq t) = \int_{A(t)} f_{XY}(x, y)dxdy,$$

siendo $A(t) = \{(x, y) \in S_{XY} : x - y \leq t\}$.
La densidad conjunta se puede obtener fácilmente ya que, por ser X e Y independientes, se tiene que $f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) = 1/4 \cdot 1/2 = 1/8$ en el soporte $S_{XY} = S_X \times S_Y = [0, 4] \times [1, 3]$ (véanse Proposiciones 3.4 y 3.5). Entonces,

$$F_Z(t) = \int_{A(t)} f_{XY}(x, y)dxdy = \frac{1}{8}\text{Area}(A(t)).$$

Calculando el área de $A(t)$ en cada caso se llega a que

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < -3, \\ \frac{(t+3)^2}{16} & \text{si} \quad -3 \leq t < -1, \\ \frac{t+2}{4} & \text{si} \quad -1 \leq t < 1, \\ 1 - \frac{(t-3)^2}{16} & \text{si} \quad 1 \leq t < 3, \\ 1 & \text{si} \quad t \geq 3. \end{cases}$$

Ejercicio 5
Según el enunciado se tiene que $N = MQ + R$. Como el soporte de N incluye al cero se puede deducir que es la distribución geométrica en su segunda versión. Es decir, $P(N = n) = pq^n$. Por otro lado obsérvese que $S_M = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $S_R = \{0, 1, 2, \ldots, Q - 1\}$ y $S_{MR} = S_M \times S_R$.
En estas condiciones, la distribución conjunta es

$$p_{MR}(m, r) = P(M = m, R = r) = P(N = mQ + r) = pq^{mQ+r}.$$

A partir de la distribución conjunta se calculan las marginales:

$$p_M(m) = \sum_{r=0}^{Q-1} p_{MR}(m, r) = pq^{mQ} \sum_{r=0}^{Q-1} q^r = pq^{mQ}\frac{1 - q^Q}{1 - q} = q^{mQ}(1 - q^Q),$$

$$p_R(r) = \sum_{m=0}^{\infty} p_{MR}(m,r) = pq^r \sum_{m=0}^{\infty} (q^Q)^m = pq^r \frac{1}{1-q^Q}.$$

Se verifica que $p_{MR}(m,r) = p_M(m)p_R(r)$, luego las variables son independientes (Proposición 3.4).

Ejercicio 6
Aplicando la Definición 3.4, se obtiene:

$$F_{XY}(t_1,t_2) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 > t_1 \quad \text{o} \quad 1 > t_2, \\ 0 & \text{si} \quad 0 \le t_1 < 1, \quad 1 \le t_2 < 3, \\ 1/8 & \text{si} \quad 0 \le t_1 < 1, \quad 3 \le t_2, \\ 3/8 & \text{si} \quad 1 \le t_1 < 2, \quad 1 \le t_2 < 3, \\ 4/8 & \text{si} \quad 1 \le t_1 < 2, \quad 3 \le t_2, \\ 6/8 & \text{si} \quad 2 \le t_1, \quad 1 \le t_2 < 3 \\ 7/8 & \text{si} \quad 2 \le t_1 < 3, \quad 3 \le t_2, \\ 1 & \text{si} \quad 3 \le t_1, \quad 3 \le t_2. \end{cases}$$

Ejercicio 7

a) El soporte conjunto será

$$S_{XY} = \{(0,k) : k = 0,1,\dots\} \cup \{(1,k) : k = 1,2,\dots\}.$$

Por otro lado,

$$p_{XY}(1,3) = p_X(1)p_{Y|X}(3|1) = p\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!} = e^{-2} \approx 0.1353$$

ya que $p_{Y|X}(y|1) = P(\xi = y-1)$.

b) En primer lugar, se calcula

$$p_Y(3) = p_{XY}(0,3) + p_{XY}(1,3) =$$

$$p_X(0)p_{Y|X}(3|0) + p_X(1)p_{Y|X}(3|1) = q\frac{e^{-\lambda}\lambda^3}{3!} + p\frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}$$

ya que $p_{Y|X}(y|0) = P(\xi = y)$ y $p_{Y|X}(y|1) = P(\xi = y-1)$. Desarrollando esta última expresión, se tiene que

$$p_Y(3) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^2}{2!}\left(p + \frac{\lambda q}{3}\right) = \frac{5}{3}e^{-2} \approx 0.2256.$$

A continuación, aplicando la Definición 3.11, se tiene que

$$p_{X|Y}(1|3) = \frac{p_{XY}(1,3)}{p_Y(3)} = \frac{p}{p + \frac{\lambda q}{3}} = 3/5.$$

c) Tenemos que

$$E[XY] = E[X(X+\xi)] = E[X^2] + E[X\xi] = p + E[X]E[\xi] = p + p\lambda = 3/2$$

donde hemos utilizado que $E[X\xi] = E[X]E[\xi]$ por ser X y ξ independientes, y que el momento de orden 2 de una Bernoulli es

$$E[X^2] = V[X] + E[X]^2 = pq + p^2 = p(q+p) = p.$$

Por otro lado, sabemos que $E[Y] = E[X+\xi] = E[X] + E[\xi] = p + \lambda$, luego

$$\text{Cov}(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = p + p\lambda - p(p+\lambda) = p - p^2 = pq = 1/4$$

Esto indica la existencia de una correlación positiva entre X e Y.

d) Por último, $V[X] = pq$ y $V[Y] = V[X+\xi] = V[X] + V[\xi] = pq + \lambda$ (hemos podido separar las varianzas por ser X y ξ independientes). Entonces:

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \frac{pq}{\sqrt{pq(pq+\lambda)}} = \sqrt{\frac{pq}{pq+\lambda}} = 1/3,$$

lo cual indica que la correlación es muy débil.

Ejercicio 8

La densidad conjunta de estos vectores es de la forma:

$$f_{XY}(x,y) = (2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-1/2}\exp\{-1/2(\vec{x}-\vec{\mu})^T\Sigma^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\}$$

(véase Sección 3.6). En particular, con los datos anteriores se tiene que

$$f_{XY}(x,y) = (2\pi)^{-1}(\sigma_X^2\sigma_Y^2 - \sigma_{XY}^2)^{-1/2}\exp\{-1/(2|\Sigma|)(\sigma_Y^2x^2 - 2\sigma_{XY}xy + \sigma_X^2y^2)\} =$$
$$(2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-1/2}\exp\{-\sigma_X^2/(2|\Sigma|)(y^2 - 2\sigma_{XY}/\sigma_X^2xy + \sigma_Y^2/\sigma_X^2x^2)\} =$$
$$(2\pi)^{-1}|\Sigma|^{-1/2}\exp\{-\sigma_X^2/(2|\Sigma|)(y^2 - 2\sigma_{XY}/\sigma_X^2xy + \sigma_{XY}^2/\sigma_X^4x^2)\}\cdot$$
$$\exp\{-\sigma_X^2/(2|\Sigma|)(-\sigma_{XY}^2/\sigma_X^4x^2+\sigma_Y^2/\sigma_X^2x^2)\} = (2\pi)^{-1/2}\exp\{-1/(2|\Sigma|)(\sigma_Y^2-\sigma_{XY}^2/\sigma_X^2)x^2\}\cdot$$
$$(2\pi)^{-1/2}|\Sigma|^{-1/2}\exp\{-\sigma_X^2/(2|\Sigma|)(y-\sigma_{XY}/\sigma_X^2x)^2\} =$$
$$(2\pi)^{-1/2}\sigma_X^{-1}\exp\{-1/(2\sigma_X^2)x^2\}\cdot(2\pi)^{-1/2}\sigma_X|\Sigma|^{-1/2}\exp\{-\sigma_X^2/(2|\Sigma|)(y-Bx)^2\} =$$
$$(2\pi)^{-1/2}\sigma_X^{-1}\exp\{-1/(2\sigma_X^2)x^2\}\cdot(2\pi)^{-1/2}(|\Sigma|/\sigma_X^2)^{-1/2}\exp\{-1/(2|\Sigma|/\sigma_X^2)(y-Bx)^2\}.$$

En estas condiciones, se observa que la primera función corresponde a la función de densidad de una $N(0,\sigma_X)$ y la segunda, es la función de densidad de una $N(Bx, \sqrt{|\Sigma|/\sigma_X^2})$. Es decir, $X \sim N(0,\sigma_X)$ e $Y|X=x \sim N(Bx, \sqrt{|\Sigma|/\sigma_X^2})$. Por tanto, a partir de los parámetros de la Proposición 3.6, se obtiene que

$$V[Y|X=x] = |\Sigma|/\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 - B^2\sigma_X^2 = \sigma^2, \quad \text{y} \quad E[Y|X=x] = A + Bx = Bx$$

(nótese que, en este caso, $A = 0$).

Capítulo 4

Ejercicio 1
Utilizando las fórmulas introducidas en la Sección 4.1.3 se tiene que:

a) En todo proceso de suma (véase Sección 4.2.2),

$$m_Y(n) = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i] = n\mu$$

siendo μ la media común a todas las v.a. X_i. En el caso particular del proceso binomial, $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, luego $m_Y(n) = np$.
En cuanto a la varianza, el siguiente desarrollo es también válido para cualquier proceso de suma:

$$\sigma_Y^2(n) = V\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} V[X_i] = n\sigma^2$$

siendo σ^2 la varianza común a todas las v.a. X_i. En el caso particular del proceso binomial, $\sigma_Y^2(n) = npq$.
Para calcular la autocovarianza entre dos instantes n y m, teniendo en cuenta la Proposición 4.4, se deduce que $C_Y(n,m) = \sigma_Y^2(n) = npq$, siendo $n < m$.
A continuación, se puede calcular la autocorrelación como

$$R_Y(n,m) = C_Y(n,m) + m_Y(n)m_Y(m) = npq + npmp = np(mp + q).$$

En cuanto al coeficiente de correlación, todo proceso de suma cumple que

$$\rho_Y(n,m) = \frac{C_Y(n,m)}{\sigma_Y(n)\sigma_Y(m)} = \frac{\sigma_Y^2(n)}{\sigma_Y(n)\sigma_Y(m)} = \frac{\sigma_Y(n)}{\sigma_Y(m)} = \frac{\sqrt{n\sigma^2}}{\sqrt{m\sigma^2}} = \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

b) Respecto al paseo aleatorio (véase Sección 4.2.2), se tiene que $E[X_i] = p - q$ y $E[X_i^2] = p + q = 1$, luego $V[X_i] = 1 - (p-q)^2$. A partir de aquí se deduce que $m_Y(n) = n(p-q)$ y $\sigma_Y^2(n) = n(1-(p-q)^2)$.
Asimismo, dados dos instantes $n < m$, la autocovarianza entre ambos instantes es $C_Y(n,m) = \sigma_Y^2(n) = n(1-(p-q)^2)$ (véase Proposición 4.4), y la autocorrelación

$$R_Y(n,m) = n(1-(p-q)^2) + n(p-q)m(p-q) = n(1+(m-1)(p-q)^2).$$

Por último, el razonamiento utilizado en el apartado anterior para obtener el coeficiente de correlación es válido también en este caso, luego $\rho_Y(n,m) = \sqrt{n/m}$.
Obsérvese que si el paseo es simétrico ($p = q = 1/2$) todas estas fórmulas se simplifican.

Ejercicio 2
Hay que determinar la distribución del vector $(Y(n_1), Y(n_2))$. Para ello, en primer lugar se obtiene que el soporte conjunto

$$S_{n_1 n_2} = \{(x_1,x_2) \in \{0,\ldots,n_1\} \times \{0,\ldots,n_2\} :\ 0 \le x_2 - x_1 \le n_2 - n_1\}.$$

En cuanto a la función de probabilidad, utilizando la Proposición 4.2, se tiene que

$$p_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = P(Y(n_1) = x_1, Y(n_2) = x_2) = P(Y(n_1) = x_1, Y(n_2) - Y(n_1) = x_2 - x_1) =$$

$$= P(Y(n_1) = x_1)P(Y(n_2) - Y(n_1) = x_2 - x_1)$$

ya que este proceso tiene incrementos independientes (véase Proposición 4.3). Por otro lado, es fácil ver que $Y(n_2) - Y(n_1) \sim B(n_2 - n_1, p)$, luego $p_{n_1 n_2}(x_1, x_2) =$

$$\binom{n_1}{x_1} p^{x_1} q^{n_1 - x_1} \binom{n_2 - n_1}{x_2 - x_1} p^{x_2 - x_1} q^{n_2 - n_1 - (x_2 - x_1)} = \binom{n_1}{x_1} \binom{n_2 - n_1}{x_2 - x_1} p^{x_2} q^{n_2 - x_2}.$$

Ejercicio 3

a) Como $-1 < \Theta < 1$, se tiene que

- si $t < -1$, entonces $X(t) = A \sim N(-1, 1)$. Por tanto, razonando como en la Sección 2.4, se puede calcular la probabilidad anterior tipificando y mirando las tablas del Apéndice B y se tiene que $P(X(t) \leq 0) \approx 0.8413$.
- si $t \geq 1$, entonces $X(t) = B \sim N(1, 1)$. Por tanto, razonando como en la Sección 2.4, se puede calcular la probabilidad anterior tipificando y mirando las tablas del Apéndice B y se tiene que $P(X(t) \leq 0) \approx 0.1587$.
- El caso más complejo se da cuando $-1 \leq t < 1$ ya que puede ser $X(t) = A$ o $X(t) = B$ dependiendo de si $\Theta > t$ o $\Theta < t$ respectivamente. Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total (Teorema 1.2), se tiene que

$$P(X(t) \leq 0) = P(\Theta > t)P(A \leq 0) + P(\Theta < t)P(B \leq 0)$$

$$= \frac{1-t}{2} 0.8413 + \frac{t+1}{2} 0.1587 = \frac{1 - 0.6826t}{2}.$$

b) En cuanto a la esperanza $m_X(t)$, razonando de forma análoga al apartado anterior, se tiene que

- si $t < -1$ se tiene que $E[X(t)] = E[A] = -1$.
- si $t \geq 1$ se tiene que $E[X(t)] = E[B] = 1$.
- si $-1 \leq t < 1$, aplicando el Teorema 3.4,

$$E[X(t)] = \int_{S_\Theta} E[X(t)|\Theta = \theta] f_\Theta(\theta) d\theta = \int_{-1}^{1} E[X(t)|\Theta = \theta] \frac{1}{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^{t} E[X(t)|\Theta = \theta] d\theta + \int_{t}^{1} E[X(t)|\Theta = \theta] d\theta \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^{t} E[B] d\theta + \int_{t}^{1} E[A] d\theta \right) = \frac{1}{2}(t + 1 - (1 - t)) = t.$$

c) Dados tres instantes t_1, t_2 y t_3, tales que $-1 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$, se tiene

$$P(X(t_3) - X(t_2) \neq 0) = P(t_2 < \theta < t_3) = \frac{t_3 - t_2}{2}$$

mientras que

$$P(X(t_3) - X(t_2) \neq 0 | X(t_2) - X(t_1) \neq 0) = 0.$$

Por tanto,

$$P(X(t_3) - X(t_2) \neq 0 | X(t_2) - X(t_1) \neq 0) \neq P(X(t_3) - X(t_2) \neq 0)$$

y aplicando la Definición 1.3 se deduce que $\{X(t)\}$ no tiene incrementos independientes (véase Definición 4.6).

Ejercicio 4

a) Se tiene que, para todo n, $X_n \in \{0, 1\}$, luego para conocer su distribución basta con calcular $P(X_n = 0)$. Para hacerlo se utiliza que, dados dos números $0 < a < b < 1$,

$$P(a < \xi < b) = \int_a^b 2x dx = x^2\Big]_a^b = b^2 - a^2.$$

- Para $n = 1$ se tiene que $P(X_1 = 0) = P(0 < \xi < 1/2) = 1/4$.
- Para $n = 2$ se tiene que

$$P(X_2 = 0) = P(0 < \xi < 1/4) + P(2/4 < \xi < 3/4) = 5/16 + 1/16 = 3/8.$$

- En general,

$$P(X_n = 0) = \sum_{l=0}^{L} P\left(\frac{2l}{2^n} < \xi < \frac{2l+1}{2^n}\right), \quad \text{siendo } L = 2^{n-1} - 1.$$

Por lo tanto, $P(X_n = 0) =$

$$\sum_{l=0}^{L}\left(\left(\frac{2l+1}{2^n}\right)^2 - \left(\frac{2l}{2^n}\right)^2\right) = 2^{-2n}\sum_{l=0}^{L}(4l+1) = 2^{-2n}\left(4\frac{L(L+1)}{2} + L + 1\right).$$

Sustituyendo el valor de L se concluye que

$$P(X_n = 0) = \frac{1}{2} - 2^{-(n+1)} \quad \text{y} \quad P(X_n = 1) = 1 - P(X_n = 0) = \frac{1}{2} + 2^{-(n+1)}.$$

Obsérvese que en el límite cuando $n \to \infty$ ambas probabilidades coinciden.

b) En este caso todo es más sencillo ya que $P(a < \xi < b) = b - a$ y en consecuencia

$$P(X_n = 0) = P(X_n = 1) = 1/2$$

para todo n. De hecho se puede ver que $\{X_n\}$ se convierte en un proceso IID con $X_n \sim \mathcal{B}(1/2)$.

Ejercicio 5

a) Se tiene que $\{X(t)\}$ con $X(t) \equiv \{$número de personas que llegan al cine en t minutos$\}$ es un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 4$. Dicho esto, piden calcular

$$
\begin{aligned}
P := P(X(10) = 50/X(40) = 200) &= P(X(10) = 50 \cap X(40) = 200)/P(X(40) = 200) \\
&= P(X(10) = 50 \cap X(40) - X(10) = 150)/P(X(40) = 200) \\
&= P(X(10) = 50)P(X(30) = 150)/P(X(40) = 200)
\end{aligned}
$$

donde se ha utilizado que el proceso de Poisson tiene incrementos independientes y estacionarios (véase Proposición 4.6) y la Proposición 4.2 y la Observación 4.3. Como $X(t) \sim \mathcal{P}(4t)$, luego la probabilidad pedida es

$$P = \frac{e^{-40}(40)^{50}}{50!}\frac{e^{-120}(120)^{150}}{150!}/\frac{e^{-160}(160)^{200}}{200!} \approx 0.065.$$

b) Se quiere calcular

$$P := P(X(20) = 75/X(10) \geq 40) = \sum_{k=40}^{75} P(X(20) = 75/X(10) = k)P(X(10) = k) =$$

$$\sum_{k=40}^{75} P(X(20) - X(10) = 75 - k)P(X(10) = k) = \sum_{k=40}^{75} P(X(10) = 75 - k)P(X(10) = k)$$

donde hemos utilizado que el proceso de Poisson tiene incrementos independientes y estacionarios (véase Proposición 4.6) y la Proposición 4.2 y la Observación 4.3. Finalmente, teniendo en cuenta que $X(10) \sim \mathcal{P}(10\lambda)$ ($\lambda = 4$), se concluye que

$$P = \sum_{k=40}^{75} \frac{e^{-10\lambda}(10\lambda)^{75-k}}{(75-k)!}\frac{e^{-10\lambda}(10\lambda)^{k}}{k!} = e^{-20\lambda}(10\lambda)^{75}\sum_{k=40}^{75}\frac{1}{(75-k)!k!}.$$

Ejercicio 6

Veamos si se cumplen las dos condiciones de la Definición 4.11:

- Aplicando el Teorema 3.2 se tiene que,

  $$E[X(t)] = \sum_{i=0}^{\infty} P(t \in I_i)E[X(t)|t \in I_i] = \sum_{i=0}^{\infty} P(t \in I_i)E[A_i] = 0$$

  independientemente del valor de t.

- Sea $s < t$. Aplicando el Teorema 3.2 se tiene que,

  $$R_X(s,t) = E[X(s)X(t)] = P(s \leftrightarrow t)E[A_i^2] + P(s \not\leftrightarrow t)E[A_iA_j], \ \ i \neq j,$$

  donde $s \leftrightarrow t$ denota que ambos instantes están en un mismo intervalo. Por otro lado,

  $$E[A_i^2] = V[A_i] + E[A_i]^2 = 1 + 0 = 1, \qquad E[A_iA_j] = E[A_i]E[A_j] = 0 \cdot 0 = 0$$

donde se ha utilizado que A_i y A_j son v.a. independientes. Por lo tanto, $R_X(s,t) = P(s \leftrightarrow t)$. Como la distribución exponencial no tiene memoria (Nota 2.6), se deduce que

$$P(s \leftrightarrow t) = P(T_i > t - s) = e^{-\lambda(t-s)}$$

con lo cual queda demostrado que el proceso es WSS.

Ejercicio 7

a) Para calcular $F_{Y(t)}(y)$, en primer lugar se observa que el soporte de esta variable es $S_{Y(t)} = [0, +\infty)$. Por otro lado, si $X(t) = 1$ se tiene que $Y(t) = 0$ y si $X(t) = -1$ entonces $Y(t) \sim \exp(\lambda)$, ya que los cambios de signo obedecen a un proceso de Poisson de parámetro λ (obsérvese aquí que el tiempo que lleve el telégrafo en estado -1 no es relevante, debido a que la distribución exponencial no tiene memoria; véase Nota 2.6).

Aplicando el Teorema de la Probabilidad Total (Teorema 1.2), se tiene que

$$F_{Y(t)}(y) = P(Y(t) \leq y) =$$

$$P(X(t)=1)P(Y(t) \leq y | X(t) = 1) + P(X(t) = -1)P(Y(t) \leq y | X(t) = -1) =$$

$$\left(\frac{1}{2} + \left(p - \frac{1}{2}\right) e^{-2\lambda t}\right) \cdot 1 + \left(\frac{1}{2} - \left(p - \frac{1}{2}\right) e^{-2\lambda t}\right)(1 - e^{-\lambda y})$$

(véase Proposición 4.12). Desarrollando esta expresión se concluye que

$$F_{Y(t)}(y) = 1 - \left(\frac{1}{2} - \left(p - \frac{1}{2}\right) e^{-2\lambda t}\right) e^{-\lambda y} \qquad \text{si } \ y \geq 0.$$

b) Ni una cosa ni otra, la variable $Y(t)$ sigue una distribución mixta ya que toma valores en un continuo pero $P(Y(t) = 0) = P(X(t) = 1) > 0$ (véase Sección 2.2).

Ejercicio 8

a) Antes que nada conviene observar que $M(n) = Y(n)/n$, siendo $\{Y(n)\}$ un proceso binomial de parámetro p. En consecuencia, su distribución de primer orden tendrá como soporte

$$S_{M(n)} = \{0/n, 1/n, 2/n, \ldots, n/n\},$$

y como función de probabilidad (véase Apéndice A):

$$P(M(n) = x/n) = P(Y(n) = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$$

(nótese que $M(n)$ es una variable discreta, aunque puede tomar valores no enteros). Ahora, dados $k+1$ instantes $n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1}$, debemos comprobar si se verifica

$$P(M(n_{k+1}) = x | M(n_1) = m_1, \ldots, M(n_k) = m_k) = P(M(n_{k+1}) = x | M(n_k) = m_k)$$

para todo conjunto de valores $m_1, \ldots, m_k, x$ con $m_i \in S_{M(i)}$ y $x \in S_{M(k+1)}$. Obsérvese que

$$M(n_{k+1}) = \frac{n_k M(n_k) + X_{n_k+1} + \cdots + X_{n_{k+1}}}{n_{k+1}} = \frac{n_k M(n_k) + Y(n_{k+1}) - Y(n_k)}{n_{k+1}},$$

siendo

$$Y(n_{k+1}) - Y(n_k) = Y(n_{k+1} - n_k) \sim B(n_{k+1} - n_k, p)$$

independiente de $M(n_1), \ldots, M(n_k)$. Tenemos por tanto que este proceso depende de su pasado exclusivamente a través del último valor conocido, en este caso $M(n_k)$. En consecuencia, podemos decir que es markoviano (Definición 4.13).

b) Obsérvese que,

$$P(M(3) = 2/3, M(5) = 4/5, M(8) = 5/8) = P(Y(3) = 2, Y(5) = 4, Y(8) = 5).$$

Ahora, razonando como en el Ejemplo 4.4,

$$P(Y(3) = 2, Y(5) = 4, Y(8) = 5) = P(Y(3) = 2)P(Y(2) = 2)P(Y(3) = 1) =$$

$$= \binom{3}{2} p^2 q \binom{2}{2} p^2 \binom{3}{1} pq^2 = 9p^5 q^3.$$

Capítulo 5

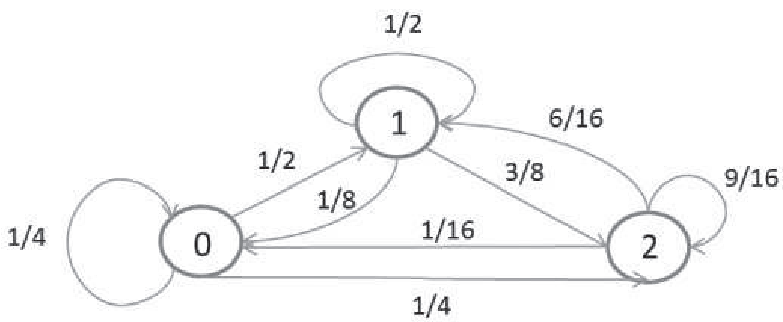
Ejercicio 1

$\{X(n)\}$ es una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 2\}$.

a) La matriz de transición es (Definición 5.5)

$$P = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 1/2 & 3/8 \\ 1/16 & 6/16 & 9/16 \end{pmatrix}.$$

Su diagrama de transición es



b) Se pide calcular $P(X(n+2) = 1|X(n) = 0) = P(X(n+2) = s_2|X(n) = s_1)$ que, según la Proposición 5.4, es el elemento $(1,2)$ de la matriz P^2. Es decir,

$$p_{12}(2) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{16} = \frac{15}{32} = 0.46875.$$

c) Aplicando la Proposición 5.6, hay que resolver el sistema,

$$\pi(P-I) = \mathbf{0} \Rightarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & -1/2 & 3/8 \\ 1/16 & 6/16 & -7/16 \end{pmatrix} = (0,0,0).$$

Las soluciones son los vectores de la forma $(\lambda, 4\lambda, 4\lambda)$. De todas ellas interesa aquella cuyas coordenadas sumen 1 es decir,

$$\pi = \left(\frac{1}{9}, \frac{4}{9}, \frac{4}{9}\right).$$

Ejercicio 2

a) Hay dos clases comunicantes, $\mathcal{C}_1 = \{1,2\}$ y $\mathcal{C}_2 = \{3,4,5\}$. $\mathcal{C}_1$ es transitoria y $\mathcal{C}_2$ recurrente.
La cadena completa no es ergódica pues no es irreducible (véase Teorema 5.3). Sin embargo, la subcadena $\mathcal{C}_2$ es irreducible aperiódica, ya que tiene dos bucles de longitudes 2 y 3 y por tanto, $d \leq \text{mcd}\{2,3\} = 1$, luego $d = 1$. En consecuencia, aplicando de nuevo el Teorema 5.3, se concluye que $\mathcal{C}_2$ es ergódica.

b) Razonando de manera análoga al Ejemplo 5.25, resolvemos el sistema $\pi(\overline{P} - I) = \mathbf{0}$, siendo $\overline{P}$ la parte de P asociada a los estados 3, 4 y 5. Es decir, $\pi_1 = \pi_2 = 0$ y

$$(\pi_3, \pi_4, \pi_5) \begin{pmatrix} -1 & 0.2 & 0.8 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (0,0,0)$$

que se traduce en

$$\begin{cases} -\pi_3 & +\pi_4 & & = 0 \\ 0.2\pi_3 & -\pi_4 & +\pi_5 & = 0 \\ 0.8\pi_3 & & -\pi_5 & = 0. \end{cases}$$

La segunda ecuación es redundante, luego se puede eliminar. Las soluciones son proporcionales al vector $(1, 1, 0.8)$. De todas ellas, interesa aquella cuyas coordenadas sumen 1, es decir:

$$(\pi_3, \pi_4, \pi_5) = \left(\frac{1}{2.8}, \frac{1}{2.8}, \frac{0.8}{2.8}\right) \approx (0.3571, 0.3571, 0.2857).$$

Ejercicio 3

a) Por el Teorema 5.2 se deduce que la cadena es ergódica, ya que es una cadena en tiempo continuo finita e irreducible.

b) Aplicando la Definición 5.11, se tiene que

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 \\ p & -1 & 1-p \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & -\frac{1}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

c) Según la Proposición 5.9, deben verificarse las GBE,

$$\pi\Gamma = \mathbf{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} -\lambda\pi_1 & +p\pi_2 & & = 0 \\ \lambda\pi_1 & -\pi_2 & +\frac{1}{\lambda}\pi_3 & = 0 \\ & (1-p)\pi_2 & -\frac{1}{\lambda}\pi_3 & = 0. \end{array} \right.$$

Operando sobre este sistema (podemos quitar la segunda ecuación, que es redundante) se tiene que $\pi_2 = \dfrac{\lambda}{p}\pi_1$ y $\pi_3 = \lambda(1-p)\pi_2$.

Nótese que este apartado también se puede hacer igualando los flujos de entrada y salida en cada estado (véase Nota 5.8).

d) Se tiene que $\pi_2 = \dfrac{8}{3}\pi_1$ y $\pi_3 = \dfrac{\pi_2}{2} = \dfrac{4}{3}\pi_1$. Por lo tanto, las soluciones del sistema anterior son de la forma

$$\left(\pi_1, \frac{8}{3}\pi_1, \frac{4}{3}\pi_1\right).$$

Como las coordenadas deben sumar 1 se tiene que,

$$\pi_1 + \frac{8}{3}\pi_1 + \frac{4}{3}\pi_1 = \frac{15}{3}\pi_1 = 1 \Rightarrow \pi_1 = \frac{3}{15},$$

luego la distribución estacionaria es

$$\pi = \left(\frac{3}{15}, \frac{8}{15}, \frac{4}{15}\right).$$

Ejercicio 4

a) Por el Teorema 5.2 se deduce que la cadena es ergódica, ya que es una cadena en tiempo continuo finita e irreducible.

b) Aplicando la Definición 5.11, se tiene que

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & \alpha & 1-\alpha & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4\beta & 4(1-\beta) & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

c) Deben verificarse las GBE (véase Proposición 5.9),

$$\pi\Gamma = \mathbf{0} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} -\pi_1 & & & +4\beta\pi_4 & = 0 \\ \alpha\pi_1 & -2\pi_2 & & +4(1-\beta)\pi_4 & = 0 \\ (1-\alpha)\pi_1 & +2\pi_2 & -3\pi_3 & & = 0 \\ & & 3\pi_3 & -4\pi_4 & = 0. \end{array} \right.$$

Operando sobre este sistema (sobra una ecuación) se tiene que

$$\pi_1 = 4\beta\pi_4, \quad \pi_2 = 4(\alpha\beta + 1 - \beta)\pi_4 \quad \text{y} \quad \pi_3 = \frac{4}{3}\pi_4.$$

Nótese que este apartado también se puede hacer igualando los flujos de entrada y salida en cada estado (véase Nota 5.8).

d) Se tiene que $\pi_1 = 2\pi_4$, $\pi_2 = 3\pi_4$ y $\pi_3 = \dfrac{4}{3}\pi_4$. Las soluciones de este sistema son de la forma

$$\left(2\pi_4, 3\pi_4, \frac{4}{3}\pi_4, \pi_4\right)$$

Como las coordenadas deben sumar 1, se concluye que

$$2\pi_4 + 3\pi_4 + \frac{4}{3}\pi_4 + \pi_4 = \frac{22}{3}\pi_4 = 1 \Rightarrow \pi_4 = \frac{3}{22}$$

con lo cual

$$\pi = \left(\frac{6}{22}, \frac{9}{22}, \frac{4}{22}, \frac{3}{22}\right).$$

Ejercicio 5

a) Sean X e Y dos variables aleatorias conjuntamente continuas y sea $Z = X + Y$. Entonces,

$$F_Z(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f_{XY}(x, y)dy\right) dx.$$

Por lo tanto la función de densidad es

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z - x)dx.$$

En consecuencia, si X e Y son independientes, la densidad de $X + Y$ se obtiene como convolución de f_X y f_Y:

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z - x)dx = (f_X * f_Y)(z)$$

(véase también Nota 3.1).
Aplicando lo anterior, como T_0 y T_1 son variables continuas independientes, se tiene que

$$f_T(x) = (f_{T_0} \star f_{T_1})(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{T_0}(t)f_{T_1}(x - t)dt =$$

$$\int_0^x \mu e^{-\mu t}\lambda e^{-\lambda(x-t)}dt = \lambda\mu e^{-\lambda x}\int_0^x e^{-(-\lambda+\mu)t}dt = \frac{\lambda\mu}{\lambda - \mu}(e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}), \quad x > 0.$$

b) Se tiene una cadena de Markov en tiempo continuo. Las GBE vienen dadas como

$$\mu\pi_1 = \lambda\pi_2$$

y debe verificarse que $\pi_1 + \pi_2 = 1$ (véase Proposición 5.9). Por tanto,

$$\pi = \left(\frac{\lambda}{\mu + \lambda}, \frac{\mu}{\mu + \lambda}\right).$$

Así, a largo plazo la red estará operativa $\frac{\mu}{\mu+\lambda} = 2/3$ del tiempo (el 66.6 % del tiempo).

c) En este caso, las GBE vienen dadas como

$$2\mu\pi_1 = \lambda\pi_2, \qquad (\lambda+\mu)\pi_2 = 2\mu\pi_1 + 2\lambda\pi_3, \qquad 2\lambda\pi_3 = \mu\pi_2.$$

Teniendo en cuenta que $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, se deduce que

$$\pi = \left(\frac{\lambda^2}{(\mu+\lambda)^2}, \frac{2\lambda\mu}{(\mu+\lambda)^2}, \frac{\mu^2}{(\mu+\lambda)^2} \right).$$

Sustituyendo $\lambda = 1$, $\mu = 2$, se tiene que $\pi = (1/9, 4/9, 4/9)$. Por tanto, a largo plazo la red estará operativa $8/9$ partes del tiempo (el $88.88\,\%$ del tiempo).

Ejercicio 6

a) Depende, al ser una cadena infinita no podemos asegurarlo, de hecho podría no tener distribución estacionaria. En el apartado d) de este mismo problema se verá que depende de la relación entre los parámetros λ y μ.

b) La matriz de tasas de transición (Definición 5.11) es

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \cdots \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & 0 & \cdots \\ 0 & \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}.$$

c) Según la Proposición 5.9 deben verificarse las GBE,

$$-\lambda\pi_1 + \mu\pi_2 = 0$$

$$\lambda\pi_{i-1} - (\lambda+\mu)\pi_i + \mu\pi_{i+1} = 0$$

para todo $i \geq 2$. De la segunda ecuación se deduce que

$$-\lambda\pi_i + \mu\pi_{i+1} = -\lambda\pi_{i-1} + \mu\pi_i, \qquad i \geq 2$$

lo cual, junto con la primera ecuación, implica que $-\lambda\pi_i + \mu\pi_{i+1} = 0$, $i \geq 2$. Tenemos entonces que $\pi_{i+1} = \dfrac{\lambda}{\mu}\pi_i$ para todo $i \geq 1$, y por tanto

$$\pi_{i+1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \pi_1.$$

d) Para obtener la distribución estacionaria hay que imponer que $\sum_{i\geq 1} \pi_i = 1$ (Proposición 5.9). Por otro lado se tiene que $\sum_{i\geq 1} \pi_i = \sum_{i\geq 1} \rho^i \pi_1$ siendo $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$. Esto es una serie geométrica de razón ρ que converge si y solo si $\rho < 1$ es decir, si $\lambda < \mu$. Si es este el caso se tiene

$$\sum_{i\geq 1} \pi_i = \frac{\pi_1}{1-\rho} = 1 \Rightarrow \pi_1 = 1 - \rho.$$

Por tanto la distribución estacionaria vendrá dada por

$$\pi_{i+1} = (1-\rho)\rho^i$$

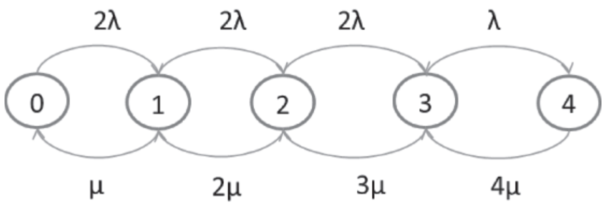
para todo $i \geq 0$ si $\rho < 1$; en otro caso no habrá distribución estacionaria.

Capítulo 6

Ejercicio 1

Este problema es similar al planteado en el Ejercicio 3 de la Sección 6.6 pero con una diferencia fundamental: en aquel caso se contaba con un solo técnico. Ahora, el proceso $\{X(t)\}$ sigue siendo una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{s_1 = 0, s_2 = 1, s_3 = 2, s_4 = 3, s_5 = 4\}$, pero algunas tasas de transición son distintas.

a) El diagrama de transición viene dado como



b) Podemos obtener las GBE igualando flujos de entrada y salida en cada estado (véase Nota 5.8). Además, como el proceso es de nacimiento y muerte, las GBE simplificadas vienen dadas como

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_1 2\lambda = \pi_2\mu \\ \pi_2 2\lambda = \pi_3 2\mu \\ \pi_3 2\lambda = \pi_4 3\mu \\ \pi_4\lambda = \pi_5 4\mu \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_2 = 2\rho\pi_1 \\ \pi_3 = \rho\pi_2 = 2\rho^2\pi_1 \\ \pi_4 = \frac{2}{3}\rho\pi_3 = \frac{4}{3}\rho^3\pi_1 \\ \pi_5 = \frac{1}{4}\rho\pi_4 = \frac{1}{3}\rho^4\pi_1 \end{array}$$

siendo $\rho = \lambda/\mu = 1$ (véase Nota 6.1). Por otro lado, como $\sum_{i=1}^5 \pi_i = 1$, se tiene que

$$\pi_1\left(1 + 2\rho + 2\rho^2 + \frac{4}{3}\rho^3 + \frac{1}{3}\rho^4\right) = \pi_1\frac{20}{3} = 1.$$

Se deduce por tanto que $\pi_1 = 3/20$ y la distribución estacionaria es

$$\pi = \left(\frac{3}{20}, \frac{6}{20}, \frac{6}{20}, \frac{4}{20}, \frac{1}{20}\right).$$

c) El consumo del sistema en un instante dado es $C = 5 \cdot X$ siendo X el número de ordenadores operativos en dicho instante. Supuesto que se ha alcanzado el equilibrio,

C será una variable discreta que toma el valor $5(k-1)$ con probabilidad π_k, para $k = 1, 2, 3, 4, 5$. Su esperanza será

$$E[C] = 0\pi_1 + 5\pi_2 + 10\pi_3 + 15\pi_4 + 20\pi_5 = \frac{30+60+60+20}{20} = \frac{170}{20} = 8.5\,\text{Kw/h}.$$

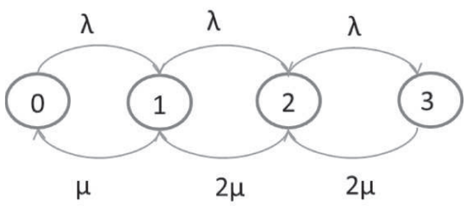
d) Teniendo en cuenta que la aplicación necesita al menos dos ordenadores operativos para funcionar, el porcentaje solicitado viene dado por la suma

$$P(X(t)=2) + P(X(t)=3) + P(X(t)=4) = \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 11/20 = 0.55.$$

Por tanto la aplicación estará funcionando el $55\,\%$ del tiempo.

Ejercicio 2

a) El diagrama de transición viene dado como



Igualando flujos de entrada y salida en cada estado, se obtienen las ecuaciones de equilibrio global que de manera simplificada se pueden expresar como

$$\begin{cases} \pi_1\mu & -\pi_0\lambda & = 0 \\ \pi_2 2\mu & -\pi_1\lambda & = 0 \\ \pi_3 2\mu & -\pi_2\lambda & = 0 \end{cases}$$

(esta cadena es un proceso de nacimiento y muerte y por tanto se puede aplicar la Nota 6.1). De aquí se deduce que

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0, \quad \pi_2 = \frac{\lambda}{2\mu}\frac{\lambda}{\mu}\pi_0, \quad \pi_3 = \left(\frac{\lambda}{2\mu}\right)^2 \frac{\lambda}{\mu}\pi_0.$$

Teniendo en cuenta que $\lambda = \mu = 2$, la distribución estacionaria debe ser de la forma $\pi = \left(\pi_0, \pi_0, \frac{\pi_0}{2}, \frac{\pi_0}{4}\right)$. Por último, como $\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$, se deduce que $\pi_0 = 4/11$, luego la distribución estacionaria es

$$\pi = \left(\frac{4}{11}, \frac{4}{11}, \frac{2}{11}, \frac{1}{11}\right).$$

La tasa de bloqueo es (véase Definición 6.1)

$$\lambda_b = \lambda\pi_3 = 2/11.$$

b) El número medio de clientes en el sistema se obtiene como

$$E[N] = 0\frac{4}{11} + 1\frac{4}{11} + 2\frac{2}{11} + 3\frac{1}{11} = 1.$$

A partir de aquí, usando la Fórmula de Little (Teorema 6.2), se tiene que

$$E[T] = E[N]/\lambda_a = 11/20$$

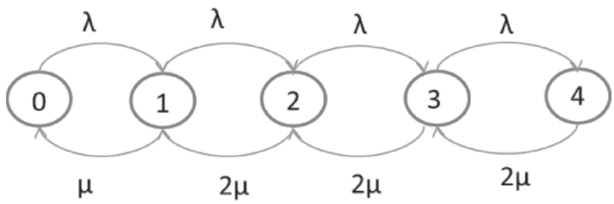
ya que $\lambda_a = \lambda - \lambda_b = 2 - 2/11 = 20/11$ (véase Definición 6.1). Por último, se tiene que

$$E[T_q] = E[T] - E[T_s] = 1/20$$

ya que $E[T_s] = 1/\mu = 1/2$.

Ejercicio 3

a) El diagrama de transición viene dado como



b) Obtenemos las ecuaciones de equilibrio global igualando flujos de entrada y salida en cada estado (véase Nota 5.8). Como es un proceso de nacimiento y muerte se pueden considerar los flujos por la derecha (véase Nota 6.1) y se tiene que

$$\begin{cases} \lambda\pi_0 = \mu\pi_1 \\ (\lambda + \mu)\pi_1 = \lambda\pi_0 + 2\mu\pi_2 \\ (\lambda + 2\mu)\pi_2 = \lambda\pi_1 + 2\mu\pi_3 \\ (\lambda + 2\mu)\pi_3 = \lambda\pi_2 + 2\mu\pi_4 \\ \lambda\pi_3 = 2\mu\pi_4 \end{cases}$$

De aquí se deduce que

$$\mu\pi_1 - \lambda\pi_0 = 2\mu\pi_2 - \lambda\pi_1 = 2\mu\pi_3 - \lambda\pi_2 = 2\mu\pi_4 - \lambda\pi_3 = 0$$

con lo cual

$$\pi_1 = \frac{\lambda}{\mu}\pi_0 \quad \text{y} \quad \pi_i = \frac{\lambda}{2\mu}\pi_{i-1}, \qquad i = 2, 3, 4.$$

Como $\lambda = 3$ y $\mu = 1$, se tiene que $\pi_1 = 3\pi_0$ y $\pi_i = \frac{3}{2}\pi_{i-1}$, para $i = 2, 3, 4$. Es decir,

$$\pi = \left(\pi_0, 3\pi_0, \frac{9}{2}\pi_0, \frac{27}{4}\pi_0, \frac{81}{8}\pi_0\right).$$

Entonces
$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{4}\frac{81}{8}\right)\pi_0 = 1 \Rightarrow \pi_0 \approx 0.04$$
y la distribución estacionaria es $\pi = (0.04, 0.12, 0.18, 0.27, 0.4)$.

Se sabe que dicha distribución debía existir porque toda cola de tipo M/M/c/K tiene distribución estacionaria (es una cadena en tiempo continuo finita e irreducible y por tanto, es ergódica; véase Teorema 5.2).

c) El número medio de clientes en el equilibrio viene dado por

$$E[N] = \sum_{i=0}^{4} i\pi_i \approx 2.89.$$

En cuanto a la tasa de bloqueo, se tiene que $\lambda_b = \lambda P(N = 4) = 3 \cdot 0.4 = 1.2$ (véase Definición 6.1).

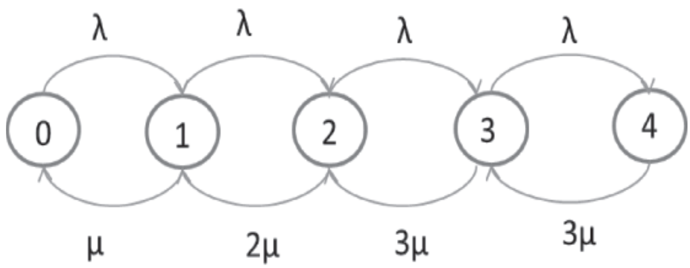
Finalmente, aplicando la Fórmula de Little (Teorema 6.2), se deduce que

$$E[T] = E[N]/\lambda_a = 2.89/1.8 = 1.6$$

ya que la tasa de admisión es $\lambda_a = \lambda - \lambda_b = 1.8$.

Ejercicio 4

a) El diagrama de tasas de transición viene dado como,



b) Igualando flujos de entrada y salida en cada estado, se obtienen las ecuaciones de equilibrio global (véase Nota 5.8). Como es un proceso de nacimiento y muerte se pueden considerar los flujos por la derecha (Nota 6.1) y las GBE simplificadas vienen dadas como

$$\left\{\begin{array}{l} \pi_0\lambda = \pi_1\mu \\ \pi_1\lambda = \pi_2 2\mu \\ \pi_2\lambda = \pi_3 3\mu \\ \pi_3\lambda = \pi_4\mu \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \pi_1 = \rho\pi_0 = 3\pi_0 \\ \pi_2 = \frac{\rho}{2}\pi_1 = \frac{\rho^2}{2}\pi_0 = \frac{9}{2}\pi_0 \\ \pi_3 = \frac{\rho}{3}\pi_2 = \frac{\rho^3}{6}\pi_0 = \frac{9}{2}\pi_0 \\ \pi_4 = \frac{\rho}{3}\pi_3 = \frac{\rho^4}{18}\pi_0 = \frac{9}{2}\pi_0 \end{array}$$

ya que $\rho = \lambda/\mu = 3$. Por otro lado, como $\sum_{i=0}^{4} \pi_i = 1$, se obtiene que

$$\pi_0 \left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{9}{2} + \frac{9}{2}\right) = \pi_0 \frac{35}{2} = 1.$$

Se deduce por tanto $\pi_0 = 2/35$ y la distribución estacionaria es

$$\pi = \left(\frac{2}{35}, \frac{6}{35}, \frac{9}{35}, \frac{9}{35}, \frac{9}{35}\right).$$

c) En primer lugar, hay que calcular la tasa de bloqueo y la tasa de admisión (véase Definición 6.1):

$$\lambda_b = \lambda \cdot \pi_4 = 27/35, \qquad \lambda_a = \lambda - \lambda_b = 78/35.$$

Por otro lado, el número medio de usuarios en el sistema es

$$E[N] = 1 \cdot \frac{6}{35} + 2 \cdot \frac{9}{35} + 3 \cdot \frac{9}{35} + 4 \cdot \frac{9}{35} = \frac{87}{35} \approx 2.4857.$$

Aplicando la Fórmula de Little (Teorema 6.2), se obtiene el tiempo medio que pasan los usuarios en el sistema:

$$E[T] = E[N]/\lambda_a = 87/78 \approx 1.1154.$$

El tiempo medio en cola es

$$E[T_q] = E[T] - E[T_s] = 87/78 - 1 = 9/78$$

ya que $E[T_s] = 1/\mu = 1$. Aplicando la Fórmula de Little de nuevo, se calcula el número medio de usuarios en cola que viene dado por:

$$E[N_q] = \lambda_a E[T_q] = 27/35 \cdot 9/78 = 81/910 \approx 0.089.$$

Finalmente, el número medio de usuarios en el servicio es

$$E[N_s] = E[N] - E[N_q] = 87/35 - 81/910 = 2181/910 \approx 2.3967$$

lo cual significa que está al $79.89\,\%$ de su capacidad, ya que $E[N_s]/c = 727/910 \approx 0.7989$.

Capítulo 7

Ejercicio 1

Sea T el tiempo que transcurre entre dos llegadas. Se tiene que $T \sim \exp(\lambda)$ y se quiere obtener un intervalo para λ. Se sabe que la media de esta distribución es $1/\lambda$ y esto mismo resulta ser su desviación típica. Entonces, como se dispone de una muestra de tamaño $n = 200$, se puede aplicar el Teorema Central del Límite (Teorema 7.1) y por tanto, se puede asumir que

$$\frac{\overline{X} - 1/\lambda}{1/\lambda \cdot 1/\sqrt{n}} = (\lambda\overline{X} - 1)\sqrt{n} \sim N(0,1).$$

Utilizando la tabla de la $N(0,1)$ del Apéndice B, se deduce que $P(-1.96 < (\lambda\overline{X} - 1)\sqrt{n} < 1.96) = 0.95$. Despejando, se obtiene

$$P((1 - 1.96/\sqrt{n})/\overline{X} < \lambda < (1 + 1.96/\sqrt{n})/\overline{X}) = 0.95$$

luego el intervalo pedido es

$$\text{IC} = \left(\left(1 - \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{\overline{X}}, \left(1 + \frac{1.96}{\sqrt{n}}\right)\frac{1}{\overline{X}}\right).$$

Sustituyendo $n = 200$ y $\overline{X} = 10.2$ se obtiene que el intervalo de confianza es IC $= (0.0845, 0.1116)$.

Ejercicio 2

a) Sabemos que en la distribución Gamma(p, λ) se tiene que $E[X] = p/\lambda$ y $V[X] = p/\lambda^2$ (véase Apéndice A). Entonces,

$$\alpha_1 = p/\lambda \quad \text{y} \quad \alpha_2 = V[X] + E[X]^2 = p/\lambda^2 + (p/\lambda)^2 = \alpha_1/\lambda + \alpha_1^2.$$

De aquí se deduce que

$$\lambda = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1^2} \quad \text{y} \quad p = \lambda\alpha_1 = \frac{\alpha_1^2}{\alpha_2 - \alpha_1^2}$$

luego

$$\widehat{\lambda}_M = \frac{a_1}{a_2 - a_1^2} \quad \text{y} \quad \widehat{p}_M = \frac{a_1^2}{a_2 - a_1^2}$$

(véase Sección 7.4.1).

b) La función de densidad de esta distribución es (véase Apéndice A)

$$f(x) = \frac{\lambda^p}{\Gamma(p)} x^{p-1} e^{-\lambda x} \quad \text{en } x > 0.$$

Entonces, la función de verosimilitud es (Definición 7.4)

$$L(x_1, \ldots, x_n; \lambda) = \frac{\lambda^{np}}{\Gamma(p)^n} \left(\prod x_i\right)^{p-1} e^{-\lambda \sum x_i}.$$

Aplicando logaritmos se tiene que (véase Observación 7.6),

$$\ln L = np \ln\lambda - \ln(\Gamma(p)^n) + (p-1)\ln\left(\prod x_i\right) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Derivando respecto de λ,

$$\frac{d\ln L}{d\lambda} = \frac{np}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Igualando la expresión anterior a cero se obtiene que $\widehat{\lambda}_{ML} = \frac{p}{\overline{X}}$ (véase Sección 7.4.2).

Ejercicio 3
La función de verosimilitud es (Definición 7.4)

$$L(x_1,\ldots,x_n;\theta) = \frac{\lambda^n e^{-\lambda\sum x_i}}{\left(1-e^{-\lambda\theta}\right)^n} \quad \text{si} \quad 0 \le x_1,\ldots,x_n \le \theta.$$

Aplicando logaritmos (véase Observación 7.6),

$$\ln L = n\left(\ln\lambda - \ln\left(1-e^{-\lambda\theta}\right)\right) - \lambda\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Derivando respecto de θ, se tiene que

$$\frac{d\ln L}{d\theta} = n\left(\frac{e^{-\lambda\theta}(-\lambda)}{1-e^{-\lambda\theta}}\right) \neq 0$$

luego no hay máximo local, pero sí absoluto en el extremo $\widehat{\theta}_{ML} = \max\{x_1,\ldots,x_n\}$ (véase Sección 7.4.2).

Ejercicio 4
Obviamente, todas las observaciones de la muestra deben verificar $0 < x_i < b$. Del mismo modo, $0 < \widehat{b}_{ML} = \max\{x_1,\ldots,x_n\} < b$ y, en consecuencia, $E[\widehat{b}_{ML}] < b$. Es decir, este estimador tiene sesgo negativo, tiende a subestimar el valor real de b.

Por otro lado, para todo $\epsilon > 0$, se tiene que

$$P(|\widehat{b}_{ML} - b| > \epsilon) = P(b - \widehat{b}_{ML} > \epsilon) = P(\widehat{b}_{ML} < b-\epsilon) = P(\max\{x_1,\ldots,x_n\} < b-\epsilon) =$$

$$= P\left(\bigcap_{i=1}^{n}(x_i < b-\epsilon)\right) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i < b-\epsilon) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{b-\epsilon}{b}\right) = \left(\frac{b-\epsilon}{b}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

ya que $0 < \dfrac{b-\epsilon}{b} < 1$. En conclusión, $\widehat{b}_{ML} \underset{p}{\rightarrow} b$, luego se trata de un estimador consistente (véase Definición 7.3).

Ejercicio 5
En primer lugar se calcula la función de verosimilitud, que viene dada como

$$L(x_1,\ldots,x_n;\sigma) = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{\dfrac{-x_i^2}{2\sigma^2}} = (\sqrt{2\pi}\sigma)^{-n}e^{\dfrac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

(véase Definición 7.4). A continuación, se aplican logaritmos y se tiene que

$$\ln L = -n \ln(\sqrt{2\pi}\sigma) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Derivando respecto de σ e igualando a cero se deduce que,

$$\frac{d \ln L}{d\sigma} = \frac{-n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0 \Rightarrow \sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Por lo tanto, el estimador para σ es

$$\widehat{\sigma}_{ML} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2} = S,$$

siendo S^2 la varianza muestral (véase Ejemplo 7.3).